Restriction Theory of the Selberg Sieve, with Applications

Ben Green and Terence Tao

(J. Théorie Nombres Bordeaux, **18**(2006), 147-182)

§1. 引言

素变数指数和

$$h_N(\theta) = \sum_{p \le N} e(p\theta)$$

已经得到了非常广泛的研究，其中 $e(\theta) = e^{2\pi i\theta}$.

自从 Hardy 和 Littlewood 时代以来，人们通过将圆周 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 划分为主区间和余区间来处理这种和式. 所谓主区间, 就是具有小分母的有理数附近的点所成之集，余区间则是主区间的余集.

例如， [36] 的第 3 章中就讨论了和式 $h_N(\theta)$. 那里指出了如何利用素数在算术级数中分布的信息，在主区间上得出 $h_N(\theta)$ 的渐近公式. 在余区间上，由一个完全不同的方法证明了 $h_N(\theta)$ 相当小.

这些结果的一个推论是：对于任意 $p > 2$, 有

$$\|h_N\|_p = \|h_N\|_{L^p(\mathbb{T})} = \Big(\int_0^1 |h_N(\theta)|^p \, d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \ll_p \frac{N^{1-\frac{1}{p}}}{\log N}. \tag{1.1}$$

容易看出，除去一个常数之外， (1.1) 式是紧凑的. 这是因为由素数定理知，当 $|\theta| \ll \frac{1}{N}$ 时，有

$$|h_N(\theta)| \sim \frac{N}{\log N}.$$

事实上，还可以对 $\|h_N\|_p$ 作渐近估计.

本文我们将考虑这个指数和的推广，其中素数集合将代之以诸如孪生素数之集.

更确切地，令

$$F = \prod_{j=1}^{k} (a_j n + b_j)$$

为一个多项式，它是 $k(\geq 1)$ 个整系数的线性因子之积.

我们设 $a_j \neq 0$ 且判断式

$$\Delta = \prod_{1\leq i<j\leq k} (a_i b_j - a_j b_i)$$

是非零的．换言之，没有两个线性因子互为有理数倍数.

对于这样的 F, 我们考虑集合

$$X = X(F) = \{n \in \mathbb{Z}^+ :\ F(n) \text{ 是 } k \text{ 个素数之积}\}.$$

如取 $F(n) = n(n+2)$, 则 X 为孪生素数对的小者所成之集.

对于任意 $q \geq 1$, 我们引入

$$\gamma(q) = \frac{1}{q} \left| \{a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} :\ (q,\, F(a)) = 1\} \right|. \tag{1.2}$$

易见

$$0 \leq \gamma(q) \leq 1.$$

这里 $\gamma(q)$ 表示模 q 中有可能包含 X 中无穷多个元的剩余类的比例.

我们将加上自然的非退化条件：

$$\gamma(q) > 0, \qquad \text{对于所有的 } q \geq 1. \tag{1.3}$$

如果这个条件不成立的话，则显然 $X(F)$ 是有限的.

注. 由中国剩余定理，我们只需对素数 q 验证 (1.3) 式即可．事实上，我们只需对有限多个素数 q 验证，这是因为当 q 大于 k 和 F 的判别式 Δ 时，结论是平凡的．对于素数 p, 我们可以算出

$$\gamma(p) \geq 1 - \frac{k}{p}, \qquad \text{当 } p > k \text{ 和 } p \nmid \Delta \text{ 时}. \tag{1.4}$$

以孪生素数为变数的指数和，或更一般的形如

$$h(\theta) = h_{N;\,F}(\theta) = \sum_{\substack{n\leq N \\ n\in X(F)}} e(n\theta) \tag{1.5}$$

的指数和还未受到很多关注. 这很容易解释，因为对于固定的 F, 不知道集合 $X(F)$ 是否非空，因而，也就无法指望在主区间上得出 h 的渐近公式，除非象 [2] 中那样对 F 做平均.

另一方面，由 Hardy-Littlewood 的 k 元组猜想可以断言，对于固定的 F, 当 $N \to \infty$ 时，有

$$h_{N;\,F}(0) = |X(F) \cap [1,\, N]| = (1 + o_F(1))\mathfrak{S}_F \frac{N}{\log^k N}, \tag{1.6}$$

其中 $\mathfrak{S}_F$ 为奇异级数

$$\mathfrak{S}_F = \prod_p \frac{\gamma(p)}{(1-\frac{1}{p})^k}. \tag{1.7}$$

对于充分大的素数 p, (1.4) 式中的不等式会变成等式. 因而， (1.7) 式中的无穷乘积是绝对收敛的.

以后将证明 $\mathfrak{S}_F$ 的一些性质. 但为了让读者先有一些感觉, 我们要提到, 当 $|a_i|,\, |b_i| \le N$ 时，有 $\mathfrak{S}_F \ll_\varepsilon N^\varepsilon$. 对于一族明确的 F(例如， $F(n) = n(n+h),\, h = 1,\, \cdots,\, N$), $\mathfrak{S}_F$ 的关于 F 的 L^p 平均将是绝对有界的.

猜想 (1.6) 离解决还很遥远. 然而, 众所周知, 对于固定的 F, 由筛法 (Selberg 筛法或组合筛法) 可以得到上界估计

$$|X(F) \cap [1,\, N]| \ll_k (1 + o_F(1))\mathfrak{S}_F \frac{N}{\log^k N}, \tag{1.8}$$

可见 [19] 中的定理 5.3. 这个上界估计与 (1.6) 式仅相差一个依赖于 k 的常数.

由 (1.8) 式和 Parseval 等式，我们可以得出 $\|h_{N,\,F}\|_2$ 的上界估计，这个上界估计的阶是正确的.

我们的第一个结果 (在 §4 的结尾证明) 是得到关于这些指数和的所有 L^p 范数好的估计，这里 $p > 2$.

定理 1.1. 设 F 为 k 个整数线性型之积，其判别式非零，且满足条件 (1.3). F 的系数 $a_i,\, b_i$ 满足 $|a_i|,\, |b_i| \le N$. 设 $h_{N,\,F}$ 为 (1.5) 式中定义的指数和. 则对于 $2 < p < \infty$, 我们有

$$\|h\|_p \ll_{p,\,k} \mathfrak{S}_F \frac{N^{1-\frac{1}{p}}}{\log^k N},$$

这里隐含的常数依赖于 k, 但与 F 无关，而且是可以明确计算的.

注. 从相反的方向来看，如果 Hardy-Littlewood 素数 k 元组猜想 (1.6) 成立的话，则容易得出下界估计

$$\|h\|_p \gg \mathfrak{S}_F \frac{N^{1-\frac{1}{p}}}{\log^k N},$$

这至少对于固定的 F 和充分大的 N 是对的. 这个估计很容易由

$$|h_{N;\,F}(\theta)| \geq \frac{1}{2}|X(F)\cap[1,\,N]|, \qquad \text{当 } |\theta| \leq \tfrac{c_k}{N} \text{ 时 (其中 } c_k > 0 \text{ 充分小)}$$

和 (1.6) 式推出.

然而，当 $p=2$ 时，我们由 Parseval 等式和 (1.6) 式可知,

$$\|h\|_2 = |X(F)\cap[1,\,N]|^{\frac{1}{2}} \gg_k \mathfrak{S}_F^{\frac{1}{2}} \frac{N^{\frac{1}{2}}}{\log^{\frac{k}{2}} N}.$$

因此，对于 $p=2$, 定理 1.1 的结论在对数的阶上是不对的.

我们证明定理 1.1, 并不是直接研究集合 $X(F)\cap[1,\,N]$, 而是通过构造一个稍微大一点的对象 β_R, 我们称它为关于 $X(F)\cap[1,\,N]$ 的包裹筛子 (enveloping sieve).

比起 $X(F)\cap[1,\,N]$ 来，这个筛函数要容易处理得多，特别是它的 Fourier 性质非常好. 在定理 1.1 的证明中，我们所用到的 $X(F)\cap[1,\,N]$ 自身的性质，仅仅是它能被这个筛子所控制.

如果在定理 1.1 中，将 $X(F)$ 代之以其他相似的集合，例如将素数代之以殆素数或殆素数的任何子集，那么，结论仍然是成立的.

由这种看法，以及 [16] 中的讨论，我们证明了以下的结果.

定理 1.2. 对于素数 p, 如果 $p+2$ 的素因子个数不超过 2 的话，则称 p 为陈素数. 存在着无穷多组由陈素数组成的 3 项算术级数.

注. 如果将定理 1.2 中的长度 3 代之以更一般的 k 的话，则很可能可以通过修改 [18] 中的方法来证明，虽然这样做所得出的常数会很差.

在 [18] 中，我们证明了素数集里可以包含长度为任意 k 的算术级数．本文的方法在精神上与 [18] 中的方法有些相像．在 [18] 中，要建立一种转移原理 (其中的伪随机条件相当强), 这可以通过对遍历论方法的有限模拟来实现．本文我们只要用简单得多的调和分析讨论，就可以证明用于定理 1.2 的转移原理，而且所需要的伪随机条件要弱得多 (我们基本上只需控制包裹筛法中的 Fourier 系数即可).

注. 定理 1.2 之前的结果是以更经典的形式，用筛法和 Hardy-Littlewood 圆法来证明的. 例如，Tolev[33] 证明了, 有无穷多组 3 项算术级数 $p_1 < p_2 < p_3$, 使得 $p_i + 2$ 有至多 r_i 个素因子，这里 (r_1, r_2, r_3) 可取为 $(5, 5, 8)$ 或 $(4, 5, 11)$.

§2. 记号

我们在此介绍一些基本记号，其中期望 $\mathbb{E}$ 之类的记号，对于本文中的加性问题是很方便的，因为有些想法来自于遍历理论.

对于一个陈述 P, 我们有时用 $\mathbf{1}_P$ 表示 P 的指标，即

$$\mathbf{1}_P = \begin{cases} 1, & \text{当 } P \text{ 为真时}, \\ 0, & \text{当 } P \text{ 为假时}. \end{cases}$$

如果 A 是一个集合，我们用 $\mathbf{1}_A$ 表示函数 $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_{x\in A}$, 用 $|A| = \sum_x \mathbf{1}_A(x)$ 表示 A 的基数.

我们用 $\mathbb{Z}_q$ 表示循环群 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, 用 $\mathbb{Z}_q^* = \{a \in \mathbb{Z}_q : (a, q) = 1\}$ 表示 $\mathbb{Z}_q$ 中所有乘法可逆元之集．在一些明显的场合中，我们常将 $\mathbb{Z}_q$ 等同于 $\{0, \cdots, q-1\}$ 或 $\{1, \cdots, q\}$.

前面说过，象 [18] 中那样，用测度语言和条件期望来做会是方便的.

如果 $f : A \to \mathbb{C}$ 是一个函数，B 为 A 的非空有限子集, 则我们用 $\mathbb{E}_{x\in B} f(x)$ 记 f 在 B 上的平均值，即

$$\mathbb{E}_{x\in B} f(x) = \frac{1}{|B|} \sum_{x\in B} f(x).$$

对于本文来讲，这个记号比概率论的传统记号 $\mathbb{E}(f(x)|\, x \in B)$ 更方便．在很多情形里， $B = A$, 这时我们可将 $\mathbb{E}_{x\in A} f(x)$ 简记为 $\mathbb{E}(f)$.

§3. 包裹筛子

现在，我们开始定理 1.1 的证明.

筛法的基本策略是：不直接研究集合 $X \cap [1, N]$, 而是构造一个包裹筛子 $\beta_R : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$, β_R 集中在 $X \cap [1, N]$ 上，它的 Fourier 系数可以被很好地控制.

我们将正规化 β, 使其均值约为 1. 由 (1.6) 式，我们希望 β_R 在 $X \cap [1, N]$ 上的大小约为 $\log^k N/\mathfrak{S}_F$. 而事实确实如此， β_R 将是逐点控制正规化指标函数 $c_k \mathfrak{S}_F^{-1} \log^k N \mathbf{1}_{X \cap [1, N]}$ 的强函数.

以下固定多项式 F. 对于不同的模 q, 我们将用“局部化”形式的 X_q 替代 $X = X(F)$, 这里

$$X_q = \{n \in \mathbb{Z}_q : \ (q, F(n)) = 1\}.$$

这个集合在 (1.2) 式中出现过.

将 X 中的所有元模 q 约化为 X_q 中的元时 (即 X 的元落在 X_q 中), 最多会出现 kq 个例外，这些例外是当有某个 $j(1 \le j \le k)$, 使得 $a_j n + b_j \in \{1, \cdots, q\}$ 时才出现.

现在我们来描述包裹筛子最重要的性质，即要控制集合

$$X_{R!} = \{n \in \mathbb{Z} : \ (d, F(n)) = 1 \text{对所有的 } 1 \le d \le R \text{ 都成立}\}.$$

这里 R 是一个待定的大整数 (筛法参数), 最后我们将取 $R = \lfloor N^{\frac{1}{20}} \rfloor$.

命题 3.1 (包裹筛子). 设 F 为 k 个整数线性型之积，其判别式非零，且满足条件 (1.3), F 的系数 a_i, b_i 满足 $|a_i|, |b_i| \le N$. 令 $R(\le N)$ 为一个大整数. 则存在一个非负函数 $\beta = \beta_R : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$, 它有如下的性质：

i) (控制性) 对于所有的整数 n, 我们有

$$\beta(n) \gg_k \mathfrak{S}_F^{-1} \log^k R \, \mathbf{1}_{X_{R!}}(n). \tag{3.1}$$

特别地， $\beta(n)$ 为非负的.

ii) (粗略的上界) 对于所有的 $1 \le n \le N$ 和 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$\beta(n) \ll_{k, \varepsilon} N^{\varepsilon}. \tag{3.2}$$

iii) (Fourier 展开) 我们有

$$\beta(n) = \sum_{q \le R^2} \sum_{a \in \mathbb{Z}_q^*} w(\frac{a}{q}) e(-\frac{an}{q}), \tag{3.3}$$

这里 $w(\frac{a}{q}) = w_R(\frac{a}{q})$. 对于所有的 $q \le R^2$ 和 $a \in \mathbb{Z}_q^*$, 有上界

$$|w(\frac{a}{q})| \ll_{k,\varepsilon} \frac{1}{q^{1-\varepsilon}}. \tag{3.4}$$

此外，我们还有 $w(0) = w(1) = 1$.

iv) (Fourier 为零性质) 设 $q \le R^2$ 和 $a \in \mathbb{Z}_q^*$. 如果 q 有平方因子, 则 $w(\frac{a}{q}) = 0$. 如果 $q > 1$ 且 $\gamma(q) = 1$, 则 $w(\frac{a}{q}) = 0$.

注. 包裹筛子 β_R 本质上是 Selberg 筛法的一种正规化形式，Selberg[31] 用他的筛法得到了上界估计 (1.8).

在 §7 中，我们将相当明确地构造出 β_R, 并给出命题 3.1 的完全证明. 如果只是在应用中要用到命题 3.1 的话，那么，实际上并不需要知道如何确切地构造.

在 §8 中，我们将给出一些注，它们解释了“包裹筛子”的含义. 我们还将比较 β_R(取 $F(n) = n$) 和另一个稍微不同的素数控制函数，这个函数我们在 [18] 中曾经用过.

§4. 关于包裹筛子的 Hardy-Littlewood 控制性质

在命题 3.1 中，我们对于集合 $X_{R!}$ 构造出一个控制函数 β_R, 它的 Fourier 系数可以被很好地控制. 实际上，对于 $p > 2$, 由 (3.4) 式容易得到关于 β_R 的 Fourier 系数好的 L^p 控制. 而对于 $p = 2$, 用 (3.4) 式的界会引起对数阶的损失.

当 $p = 4, 6, 8, \cdots$ 时，由 Parseval 公式，可以用上述好的 L^p 控制推出关于 h 好的控制. 再由内插法，就可以对 $p \ge 4$, 得出定理 1.1.

例如，当 $4 < p < 6$ 时，由 Hölder 不等式可得,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |h(\theta)|^p d\theta &= \int_0^1 |h(\theta)|^{2(6-p)} |h(\theta)|^{3(p-4)} d\theta \\ &\le \Big(\int_0^1 |h(\theta)|^4 d\theta\Big)^{\frac{6-p}{2}} \Big(\int_0^1 |h(\theta)|^6 d\theta\Big)^{\frac{p-4}{2}}.\end{aligned}$$

因此，由 $\|h\|_4$ 和 $\|h\|_6$ 的估计可得到 $\|h\|_p$ 的估计.

然而，这种简单的讨论对于最感兴趣的区域 $2 < p < 4$ 是不够的，因为当 $p = 2$ 时，在对数阶上会出问题，这在引言中已经提到过.

在区域 $2 < p < 4$(或更一般地 $p \notin 2\mathbb{N}$) 中，关于 Fourier 变换的 L^p 范数没有好的单调性质可以利用. 在 [24] 中 144 页上，可以找到一个简单的例子，表明此种意义下的单调性是不成立的. 进一步的讨论，可见 [1], [17] 和 [23].

另一方面，所有已知的单调性不成立的例子都是相当病态的. 当控制函数 β_R 还具有另外的 Fourier 性质或几何性质的话，则常有可能恢复 Hardy-Littlewood 控制类型的估计. 这称为限制现象 (restriction phenomenon), 在调和分析中已有深入的研究，关于其历史的综述可见 [32].

将限制理论的思想用于数论中的做法，肇始于 Bourgain [3], [4]. 在 [3] (它和我们最有关系) 中说明了如何得到 $\|\widehat{f}\|_p$ 的界，这里 f 为支撑在素数集上的函数. Green[16] 也得到过这样的一个界，他所用的是 Brun 筛法和算术级数中素数定理的稍微精确的版本.

我们这里的讨论在精神上当然是相似的, 而与先前讨论的不同之处在于，我们完全依赖于命题 3.1 给出的控制性质. 特别地，我们不需要用 ζ 函数的任何类型的控制或相关函数的控制.

命题 4.1 给出了关于 β 在有限 Abel 群 $\mathbb{Z}_N$ 环境中的一个限制估计. 这个估计的对偶形式 (即命题 4.2) 对于应用会更有趣，定理 1.1 是命题 4.2 几乎直接的推论. 如同限制理论中的许多讨论一样，这里的讨论在精神上也是基于 Tomas-Stein 方法，它首次用于 [34] 中.

命题 4.1 (关于 β 的 L^q 限制估计). 设 R, N 为大数， $1 \ll R \ll N^{\frac{1}{10}}$. 而 k, F, β_R 如命题 3.1 中所设. 令 $f: \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ 为任意函数. 则对于每个 $1 < q < 2$, 我们有

$$\mathbb{E}_{1\le n\le N}\Big|\sum_{b\in\mathbb{Z}_N} f(b)e(\frac{bn}{N})\Big|^2\beta_R(n) \ll_{q,\,k} \Big(\sum_{b\in\mathbb{Z}_N}|f(b)|^q\Big)^{\frac{2}{q}}. \tag{4.1}$$

证明. 首先，我们将对特殊情形，来估计 (4.1) 式的左端. 设 f 支撑在集合 $B(\subseteq \mathbb{Z}_N)$ 上，且有 $\|f\|_\infty \le 1$. 我们断言，对于任意 $\varepsilon > 0$, 总有

$$\mathbb{E}_{1\le n\le N}\Big|\sum_{b\in\mathbb{Z}_N} f(b)e(\frac{bn}{N})\Big|^2\beta_R(n) \ll_{\varepsilon,\,k} |B|^{1+\varepsilon}. \tag{4.2}$$

初看起来，(4.2) 是要弱于 (4.1) 式，但实际上两者是等价的．为了从 (4.2) 式推出 (4.1) 式，我们先做正规化，即令

$$\Big(\sum_{b\in\mathbb{Z}_N}|f(b)|^q\Big)^{\frac{2}{q}}=1. \tag{4.3}$$

特别地，由此可知，对于所有的 $b\in\mathbb{Z}_N$, 有 $|f(b)|\le 1$.

对于所有的 $j\ge 0$, 我们定义集合

$$B_j=\{b\in\mathbb{Z}_N:\ \frac{1}{2^{j+1}}<|f(b)|\le\frac{1}{2^j}\}.$$

则有

$$\sum_{b\in\mathbb{Z}_N}f(b)e(\frac{bn}{N})=\sum_{j\ge 0}\sum_{b\in B_j}f(b)e(\frac{bn}{N}).$$

由 (4.3) 式知，$|B_j|\le 2^{(j+1)q}$. 对 B_j 用 (4.2) 式 (其中 $f(b)$ 代之以 $2^jf(b)$), 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\Big(\mathbb{E}_{1\le n\le N}\Big|\sum_{b\in B_j}f(b)e(\frac{bn}{N})\Big|^2\beta_R(n)\Big)^{\frac12}\\ \ll_{q,\varepsilon,k}&\ \frac{1}{2^j}|B_j|^{\frac12(1+\varepsilon)}\ll_{q,\varepsilon,k}\ \frac{1}{2^{(1-\frac{q}{2}(1+\varepsilon))j}}.\end{aligned}$$

因为 $q<2$, 所以可取 ε 充分小，使得 $1-\frac{q}{2}(1+\varepsilon)>0$. 令 $d=1-\frac{q}{2}(1+\varepsilon)$.

综上所述，我们可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{1\le n\le N}\Big|\sum_{b\in\mathbb{Z}_N}f(b)e(\frac{bn}{N})\Big|^2\beta_R(n)\\ =&\ \mathbb{E}_{1\le n\le N}\Big|\sum_{j\ge 0}\sum_{b\in B_j}f(b)e(\frac{bn}{N})\Big|^2\beta_R(n)\\ =&\ \mathbb{E}_{1\le n\le N}\Big(\sum_{j_1\ge 0}\sum_{b_1\in B_{j_1}}f(b_1)e(\frac{b_1n}{N})\sum_{j_2\ge 0}\sum_{b_2\in B_{j_2}}\overline{f(b_2)}e(-\frac{b_2n}{N})\beta_R(n)\Big)\\ =&\sum_{j_1\ge 0}\sum_{j_2\ge 0}\mathbb{E}_{1\le n\le N}\Big(\sum_{b_1\in B_{j_1}}f(b_1)e(\frac{b_1n}{N})\beta_R^{\frac12}(n)\Big)\\ &\qquad\cdot\Big(\sum_{b_2\in B_{j_2}}\overline{f(b_2)}e(-\frac{b_2n}{N})\beta_R^{\frac12}(n)\Big)\\ \ll&\sum_{j_1\ge 0}\sum_{j_2\ge 0}\Big(\mathbb{E}_{1\le n\le N}\Big|\sum_{b_1\in B_{j_1}}f(b_1)e(\frac{b_1n}{N})\Big|^2\beta_R(n)\Big)^{\frac12}\end{aligned}$$

$$\cdot \Big(\mathbb{E}_{1\le n\le N}\Big|\sum_{b_2\in B_{j_2}} f(b_2)e(\frac{b_2 n}{N})\Big|^2\beta_R(n)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll_{q,\,k} \sum_{j_1\ge 0}\sum_{j_2\ge 0}\frac{1}{2^{dj_1}}\cdot\frac{1}{2^{dj_2}} \ll_{q,\,k} 1.$$

由此可见，的确可以从 (4.2) 式推出 (4.1) 式.

参 考 文 献

[1] G. F. Bachelis, *On the upper and lower majorant properties in $L^p(G)$*, Quart. J. Math. (Oxford) (2) **24**(1973), 119-128.

[2] A. Balog, *The Hardy-Littlewood k-tuple conjecture on average*, Analytic Number Theory (eds. B. Berndt, H. G. Diamond, H. Halberstam and A. Hildebrand), Birkhäuser, 1990, 47-75.

[3] J. Bourgain, *On $\Lambda(p)-$subsets of squares*, Israel J. Math., **67**(1989), 291-311.

[4] J. Bourgain, *Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and application to non-linear evolution equations I, Schrödinger equations*, GAFA **3**(1993), 107-156.

[16] Ben Green, *Roth's theorem in the primes*, Ann. Math., **161**(2005), 1609-1636.

[17] B. J. Green and I. Z. Ruzsa, *On the Hardy-Littlewood majorant problem*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **137**(2004), no. 3, 511-517.

[18] Ben Green and Terence Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, preprint.

[19] H. Halberstam and H. E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, 1974.

[23] G. Mockenhaupt and W. Schlag, manuscript.

[24] H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **84**, AMS, Providence, RI, 1994.

[31] A. Selberg, *On an elementary method in the theory of primes*, Kong. Norske Vid. Selsk. Forh. B, **19**(18), 64-67.

[32] T. C. Tao, *Recent progress on the restriction conjecture*, in Fourier analysis and convexity (Milan, 2001), 217-243, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[33] D. I. Tolev, *Arithmetic progressions of prime-almost-prime twins*, Acta Arith., **88**(1999), no.1, 67-98.

[34] P. Tomas, *A restriction theorem for the Fourier transform*, Bull. Amer. Math. Soc., **81**(1975), 477-478.

[36] R. Vaughan, *The Hardy-Littlewood Method*, 2nd, Cambridge Tracts in Math. **125**, Cambridge University Press, 1997.